

МАТЕМАТИКА

Подготовка к ОГЭ:

**решебник заданий на построение графиков
функций, содержащих переменную под знаком
модуля**

Решебник составил:

Тузовский Станислав,
учащийся 9 «Г» класса
школы № 3

Киселёвск 2022 г.



Данное пособие призвано помочь девятиклассникам выполнению задания № 22. Основной упор делается на рассмотрение (на конкретных примерах) заданий на построение графиков функций, содержащих знак модуля.

В конце предлагаются задания для самостоятельной работы, аналогичные тем, которые разобраны.

Пример. Построить график функции $y=|5-x|-|2-x|-3$

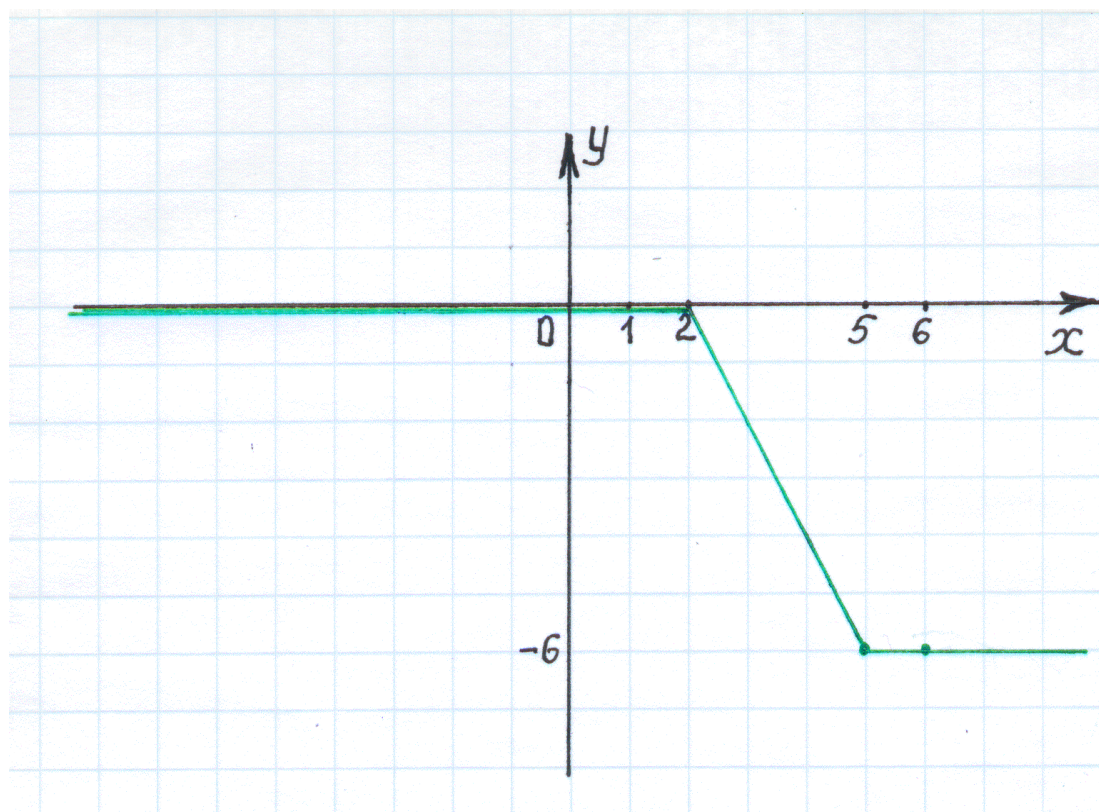
Нули модулей: 2; 5

Составим таблицу:

x	0	2	5	6
y	0	0	-6	-6

Построим график: отметим найденные точки и соединим их ломаной

$$y=|5-x|-|2-x|-3$$



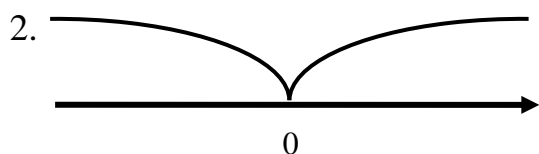
Рассмотрим решения заданий из пособия ОГЭ 2022. Математика. 37 вариантов. Типовые экзаменационные варианты. Под ред. И.В. Яценко.- М.: Издательство «Экзамен», 2022.

Вариант 6, задание № 22. . Постройте график функции $y = x|x| - |x| - 6x$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

$$y = x|x| - |x| - 6x$$

1. Найдем нули модулей: 0

$$x=0$$



3. Если $x < 0$, то $y = -x^2 + x - 6x$

Если $x \geq 0$, то $y = x^2 - x - 6x$

$$y = \begin{cases} -x^2 + x - 6x & \text{при } x < 0 \\ x^2 - x - 6x & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = -x^2 + x - 6x = -x^2 - 5x$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{-2} = -2,5 \quad y_0 = -6,25 - 2,5 + 15 = 6,25;$$

$(-2,5; 6,25)$ - вершина параболы

Нули функции: $-5; 0$.

$$-x^2 - 5x = 0; -x(x+5) = 0; x = 0 \text{ или } x = -5$$

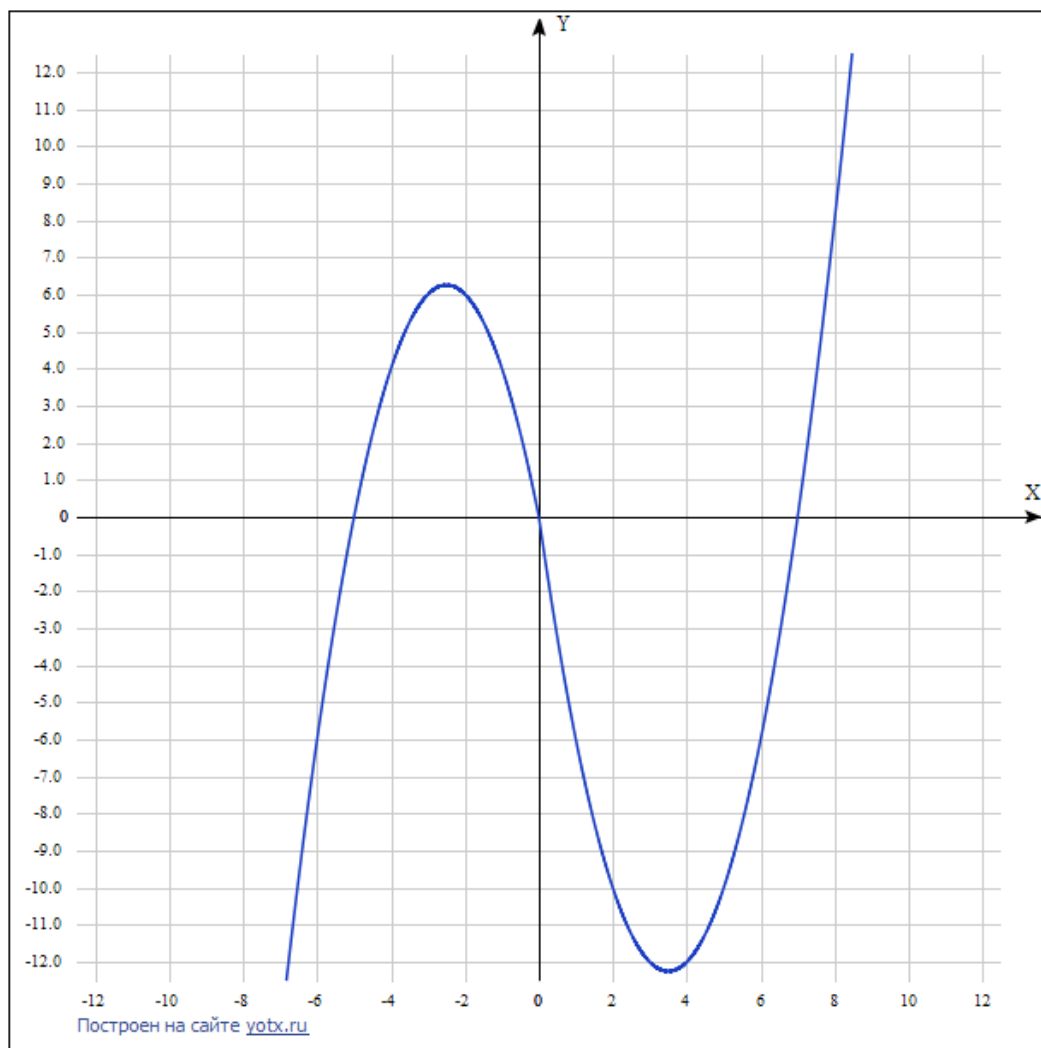
$$y = x^2 - x - 6x = x^2 - 7x$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad y_0 = 12,25 - 24,5 = -12,25$$

Нули функции: $0; 7$.

$$x^2 - 7x = 0; x(x-7) = 0; x = 0 \text{ или } x = 7$$

4. Строим график функции $y = x|x| - |x| - 6x$



Прямая $y=m$ имеет с графиком данной функции ровно 3 общие точки при $m=-12,25$ и при $m=6,25$

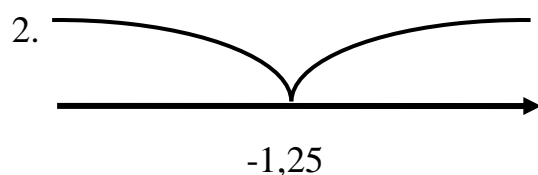
Вариант 13, задание № 22. . Постройте график функции $y = x^2 - |4x + 5|$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

$$y = x^2 - |4x + 5|$$

1. Найдем нули модулей: $-1,25$

$$4x+5=0$$

$$x = -1,25$$



3. Если $x < -1,25$, то $y = x^2 + 4x + 5$

Если $x \geq -1,25$, то $y = x^2 - 4x - 5$

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 5, & \text{при } x < -1,25 \\ x^2 - 4x - 5, & \text{при } x \geq -1,25 \end{cases}$$

$$y = x^2 + 4x + 5$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \quad y_0 = 4 - 8 + 5 = 1$$

(-2; 1) - вершина параболы

Нули функции: нет нулей функции

$$x^2 + 4x + 5 = 0; D = 16 - 20 = -4; D < 0; \text{нет корней.}$$

$$y = x^2 - 4x - 5$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \quad y_0 = 4 - 8 - 5 = -9$$

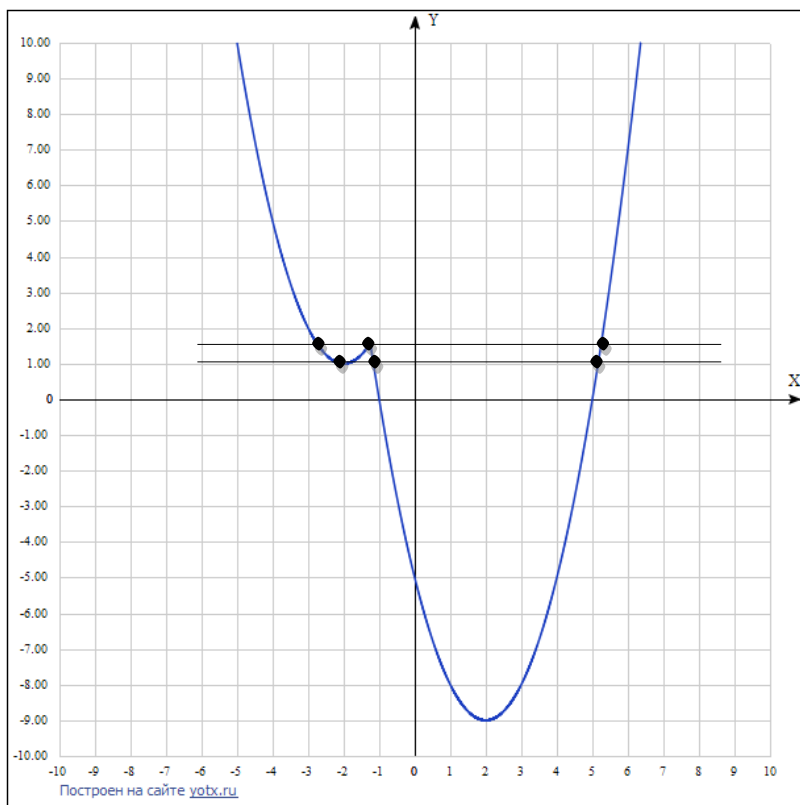
(2; -9) - вершина параболы

Нули функции: нет нулей функции

$$x^2 - 4x - 5 = 0; D = 16 + 20 = 36; D > 0; 2 \text{ корня; } x = -1; x = 5$$

$$\text{При } x = -1,25: y = \frac{25}{16} + 5 - 5 = \frac{25}{16}$$

4. Строим график функции $y = x^2 - |4x + 5|$



Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки при $m=1$, $m=\frac{25}{16}$

Задание 4.1.177. Из пособия: Математика. Основной Государственный Экзамен. Готовимся к итоговой аттестации. Под редакцией И.В. Яценко. 2021г.

Постройте график функции $y=x^2-5|x|+6$. Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс.

Решение

$$y=x^2-5|x|+6$$

$y(-x)=(-x)^2-5|(-x)|+6=x^2-5|x|+6$, поэтому данная функция четная, следовательно, график функции симметричен относительно оси Oy .

$$y=x^2-5x+6 \text{ при } x \geq 0$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} = 2,5; \quad y_0 = 6,25 - 12,5 + 6 = -0,25;$$

(2,5; -0,25)- вершина параболы

Нули функции: 2; 3.

$$x^2-5x+6=0; \quad D=25-24=1; \quad x_1=2; \quad x_2=3$$

Сначала строим график функции $y=x^2-5x+6$ при $x \geq 0$.

Для всех точек $x < 0$ построим симметричные точки относительно оси Oy .

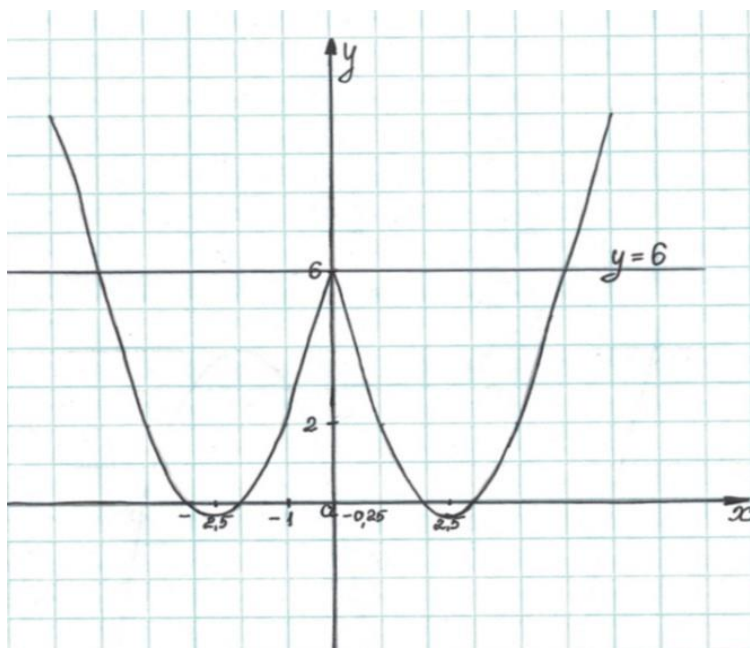


График данной функции может иметь с прямой, параллельной оси Ox , 2,3,4 общих точек. Наибольшее число общих точек :4.

Ответ: 4

Рассмотрим решения заданий из пособия ОГЭ 2021. Математика. 36 вариантов. Типовые экзаменационные варианты. Под ред. И.В. Ященко.- М.: Издательство «Национальное образование», 2021.

Вариант 4, задание № 22. Постройте график функции $y = \frac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$.

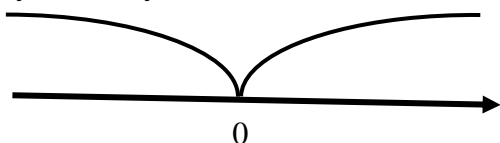
Определите при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

Решение.

$$y = \frac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$$

1. Нули модуля: 0

2.



3. Если $x < 0$ то $y = \frac{-2,5x-1}{-x-2,5x^2} = \frac{-(2,5x+1)}{-x(1+2,5x)} = \frac{1}{x}$, при $x \neq 0, x \neq -0,4$

При $x = -0,4$, $y = \frac{1}{-0,4} = -2,5$; $(-0,4; -2,5)$ – “выколотая точка”

Если $x > 0$ то $y = \frac{2,5x-1}{x-2,5x^2} = \frac{2,5x-1}{x(1-2,5x)} = -\frac{1}{x}$, при $x \neq 0, x \neq 0,4$

При $x = 0,4$, $y = -\frac{1}{0,4} = -2,5$; $(0,4; -2,5)$ – “выколотая точка”

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0, x \neq -0,4; \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, x \neq 0,4. \end{cases}$$

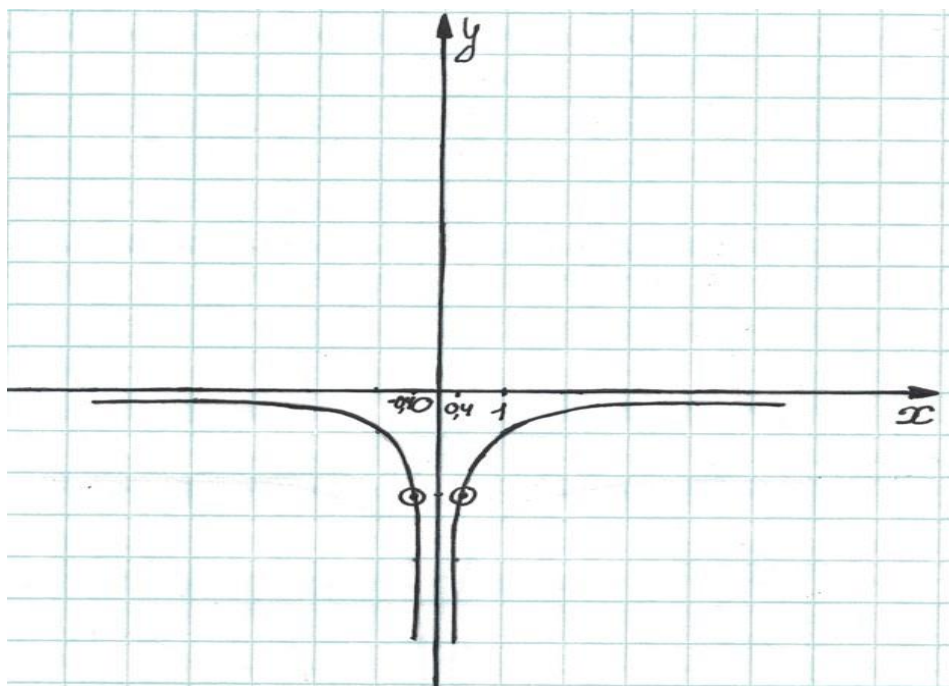
4. Строим графики функций.

$x < 0$

x	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4
y	-4	-2	-1	-0,5	$-\frac{1}{4}$

$x > 0$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$



Прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки, если она совпадает с осью Ox или, если она проходит через точки $(-0,4; -2,5)$ и $(0,4; -2,5)$.

Если прямая $y=kx$ проходит через точку $(-0,4; -2,5)$, то $k=\frac{y}{x}=\frac{-2,5}{-0,4}=6,25$.

Если прямая $y=kx$ проходит через точку $(0,4; -2,5)$, то $k=\frac{y}{x}=\frac{-2,5}{0,4}=-6,25$.

Ответ: -6,25; 0; 6,25.

Вариант 31, задание № 22. Постройте график функции $y=x^2 - |6x+1|$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

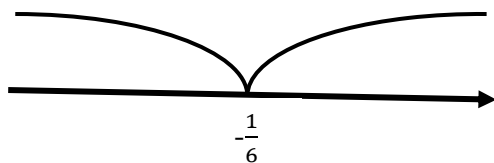
Решение

$$y=x^2 - |6x+1|$$

1. Найдем нули модуля: $-\frac{1}{6}$

$$6x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{6}$$

2.



3. Если $x < -\frac{1}{6}$, то $y=x^2 - (-6x - 1) = x^2 + 6x + 1$;

Если $x \geq -\frac{1}{6}$, то $y=x^2 - (6x + 1) = x^2 - 6x - 1$;

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 1, & \text{если } x < -\frac{1}{6} \\ x^2 - 6x - 1, & \text{если } x \geq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$y = x^2 + 6x + 1$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3; y_0 = 9 - 18 - 1 = -8;$$

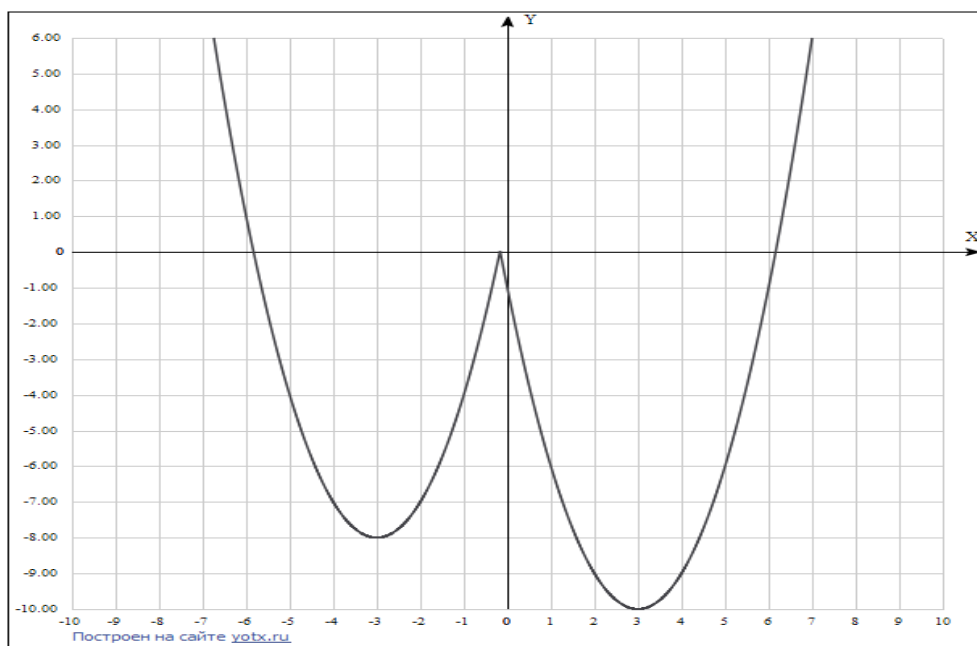
$(-3; -10)$ - координаты вершины параболы;

$$y = x^2 - 6x - 1$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3; y_0 = 9 - 18 - 1 = -10;$$

(3; -8) - координаты вершины параболы;

4. Строим график функции $y = x^2 - |6x + 1|$



Прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно 3 общие точки при $m = 0$ и при $m = -8$

Ответ: -8; 0

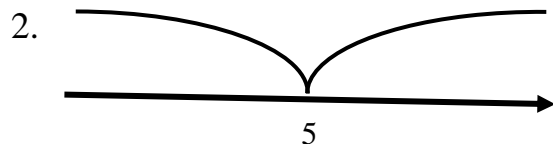
Вариант 8, задание № 22. Постройте график функции $y = x^2 - 11x - 2|x - 5| + 30$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

$$y = x^2 - 11x - 2|x - 5| + 30$$

1. Найдем нули модуля: 5

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$



3. Если $x < 5$, то $y = x^2 - 11x - 2(-x + 5) + 30 = x^2 - 9x + 20$

Если $x \geq 5$, то $y = x^2 - 11x - 2(x - 5) + 30 = x^2 - 13x + 40$

$$y = \begin{cases} x^2 - 9x + 20, & \text{если } x < 5 \\ x^2 - 13x + 40, & \text{если } x \geq 5 \end{cases}$$

$$y = x^2 - 9x + 20$$

$$x_0 = 4,5; y_0 = -0,25;$$

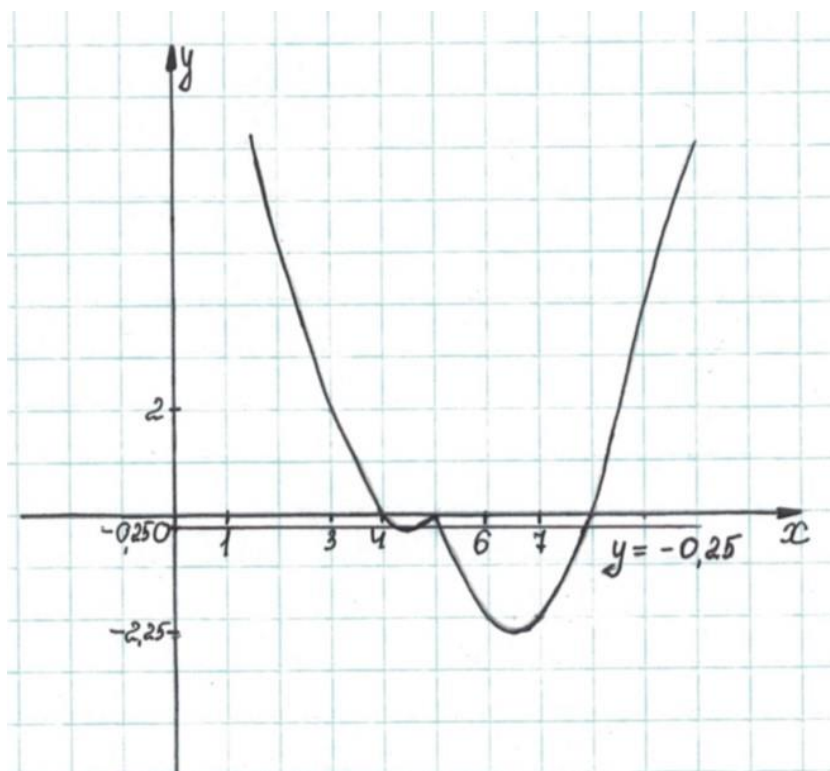
(4,5; -0,25) - координаты вершины параболы;

$$y = x^2 - 13x + 40$$

$$x_0 = 6,5; \quad y_0 = -2,5$$

(6,5; -2,5) - координаты вершины параболы;

4. Строим график функции при $x < 5$ и при $x \geq 5$



Прямая $y=m$ имеет с графиком данной функции ровно 3 общие точки при $m=-0,25$ и при $m=0$

Ответ: -0,25 ; 0

Вариант 11, задание № 22

Постройте график функции $y = \frac{|x|-1}{|x|-x^2}$

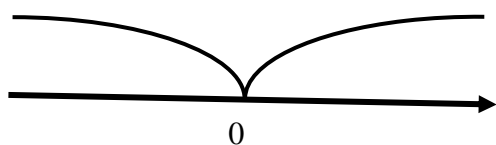
Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

Решение.

$$y = \frac{|x|-1}{|x|-x^2}$$

1. Нули модуля: 0

2.



3. Если $x < 0$, то $y = \frac{|x|-1}{|x|-x^2} = \frac{-(x+1)}{-x(1+x)} = \frac{1}{x}$, при $x \neq 0, x \neq -1$

При $x = -1, y = -1$; $(-1; -1)$ – «выколота точка»

Если $x > 0$, то $y = \frac{|x|-1}{|x|-x^2} = \frac{x-1}{x(1-x)} = -\frac{1}{x}$ при $x \neq 0, x \neq 1$

При $x = 0,5, y = -1$ $(1; -1)$ – «выколота точка»

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0, x \neq -1 \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

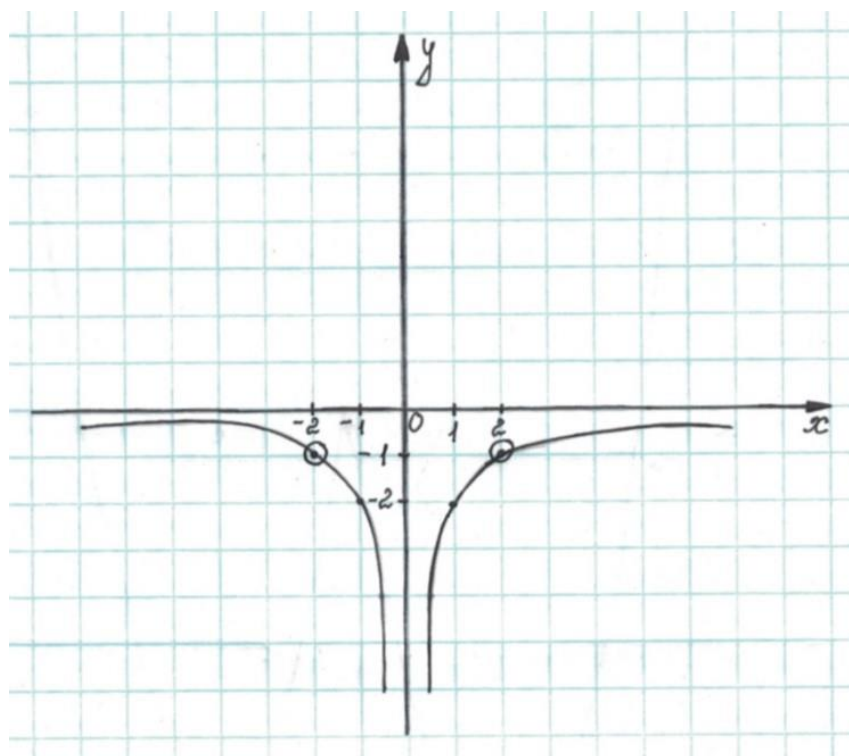
$x < 0$

x	$-\frac{1}{4}$	-0,5	-1	-2	-4
y	-4	-2	-1	-0,5	$-\frac{1}{4}$

$$x > 0$$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

4. Строим графики функций:



Найдем значения k , при которых прямая $y=kx$ не имеет общих точек с графиком данной функции.

Прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки, если она совпадает с осью Ox или, если она проходит через точки $(-1; -1)$ и $(1; -1)$.

Если прямая $y=kx$ проходит через точку $(-0,5; -2)$, то $k = \frac{y}{x} = 1$

Если прямая $y=kx$ проходит через точку $(0,5; -2)$, то $k=\frac{y}{x} = -1$

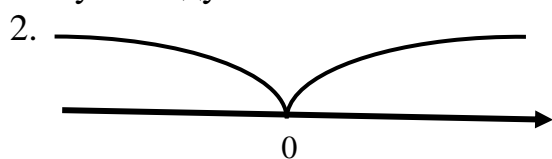
Ответ: -1; 0; 1

Вариант 13, задание 22. Постройте график функции $y=|x|(x-1)-5x$ и определите при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение

$$y=|x|(x-1)-5x$$

1. Нули модуля: 0



3. Если $x \geq 0$, то $y=x(x-1)-5x=x^2-6x$

Если $x < 0$, то $y=-x(x-1)-5x=-x^2-4x$

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x^2 - 4x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$y = -x^2 - 4x$, если $x < 0$

$$x_0 = -\frac{-4}{-2} = -2; y_0 = -(-2)^2 - 4(-2) = 4;$$

$(-2; 4)$ - координаты вершины параболы

$y = x^2 - 6x$, если $x \geq 0$

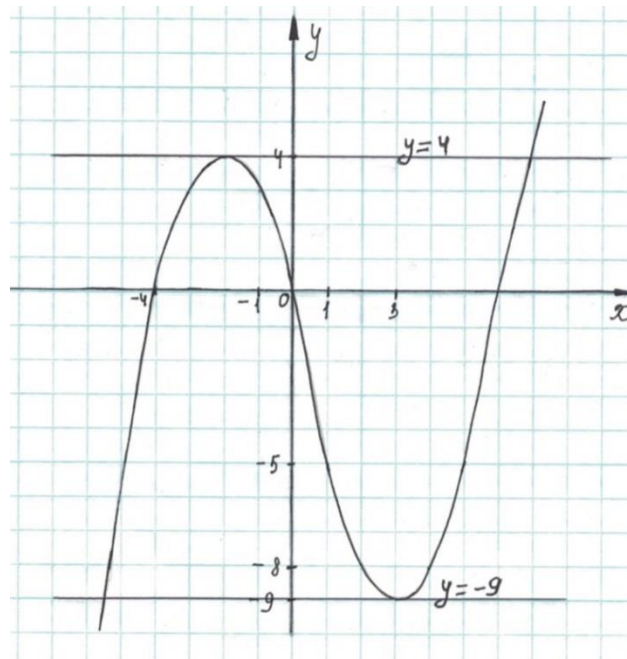
$$x_0 = -\frac{-6}{2} = 3; y_0 = 9 - 18 = -9;$$

$(3; -9)$ - координаты вершины параболы

Дополнительные точки:

$$x=2, y=-8; (2; -8); x=1, y=-5; (1; -5)$$

4. Строим график функции $y=|x|(x-1)-5x$



Прямая $y=m$ имеет с графиком данной функции ровно 2 общие точки при $m=-9$ и $m=4$

Ответ: -9;4

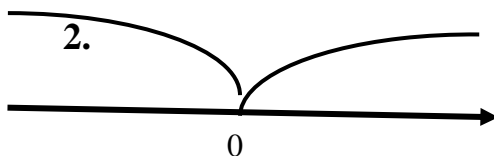
Вариант 30, задание № 22. Постройте график функции $y = \frac{(0,25x^2 + 0,5x)|x|}{x+2}$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

$$y = \frac{(0,25x^2 + 0,5x)|x|}{x+2};$$

$$y = \frac{(0,25x^2 + 0,5x)|x|}{x+2} = \frac{0,25x(x+2)|x|}{x+2} = 0,25x|x|;$$

1. Нули модуля: 0.



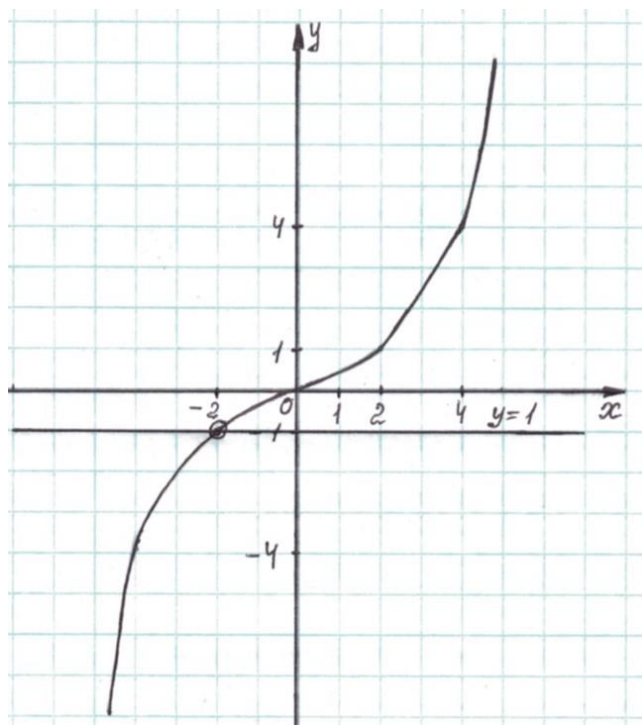
Если $x < 0$, то $y = 0,25x(-x) = -0,25x^2$;

Если $x \geq 0$, то $y = 0,25x \cdot x = 0,25x^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,25x^2, \text{ если } x < 0; x \neq -2; \\ \end{array} \right.$$

$y =$

$0,25x^2$, если $x \geq 0$.



При $x=-2$, $y=-1$; $(-2; -1)$ – “выколота точка”

4. Строим график функции.

Найдем значения m , при которых прямая $y=m$ не имеет общих точек с графиком.

Прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки, если она проходит через точку $(-2; -1)$ и параллельна оси Ox , следовательно, $m = -1$

Ответ: -1

Задания для самостоятельной работы

Вариант 33 №22

Постройте график функции $y=3|x+8|-x^2 - 14x - 48$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ: 0; 0,25

Вариант 13 №22

Постройте график функции $y=|x|(x-1)-5x$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: -9; 4

Вариант 26 №22

Постройте график функции $y=|x|x+3|x|-5$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: -1; 16

Вариант 11 №22

Постройте график функции $y=\frac{|x|-1}{|x|-x^2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Ответ: -1; 0; 1

Вариант 21 №22

Постройте график функции $y=\frac{(x^2-x)|x|}{x-1}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Ответ: 1

Вариант 11 №22

Постройте график функции $y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right|+\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: -1; 1